MC420 Storia della Matematica 1
a.a. 2010-2011
Ana Millán Gasca

Lezione 1
Le origini della matematica: origini , pratiche, metodi

All'inizio fu lo scriba, cap. 1
ENRICO GIUSTI 1999, *Ipotesi sulla natura degli enti matematici*, Torino, Bollati Boringhieri, capitolo 3, Le origini della geometria.
D. SCHMANDT-BESSERAT 1997, *How Writing Came About*, Austin, USA, University of Texas Press.
APPENDICE 1.A LA MATEMATICA PRATICA
APPENDICE 1.B RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI E SISTEMI DI NUMERAZIONE
LETTURA 1 SAPERE PRATICO-OPERATIVO, SAPIENZA RELIGIOSA E SCIENZA NELLE PRIME CIVILTÀ

Si veda anche:
VV. AA., con prefazione di Gaetano Fichera, *L'alba dei numeri*, Edizioni Dedalo, Bari, 1987.
ALICE CARTOCCI, *La matematica degli Egizi. I papiri matematici del Medio Regno*, Firenze University Press, Firenze, 2007.
GEORGES IFRAH, *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1989.
RICHARD COURANT, HERBERT ROBBINS, *Che cos'è la matematica*, Torino, Bollati Boringhieri, Torino, 2000 (2° edizione).

Bibliografia

Tra i lavori classici ricordiamo:

NEUGEBAUER, OTTO, *Le scienze esatte nell'antichità*, Milano, Feltrinelli, 1974.
BARTEL VAN DER WAERDEN, *Science awakening*, Groningen, Noordhoff,1954.
BARTEL VAN DER WAERDEN, *Geometry and algebra in ancient civilisation*, Berlin, Springer, 1983.

Per avere un'idea della ricerca specialistica più recente, che ha modificato in parte la visione della matematica antica, citiamo:

JORAN FRIBERG, *Unexpected Links Between Egyptian and Babylonian Mathematics*, Singapore, World Scientific Publishing, 2007.
JENS HØYRUP, *In measure, number, and weight*, New York, State University of New York Press.

Per sapere di più sulla sulla cultura mesopotamica e sulla scienza egizia

MARIO LIVERANI, *Antico Oriente. Storia, società, economia*, Laterza, Roma-Bari, 2006.
________________*Uruk, la prima città*, Laterza, Roma-Bari, 1998.

GLORIA ROSATI, "Scienza", in *Egittologia*, a cura di Alessandro Roccati, Istituto poligrafico e zecca dello Stato, Roma, 2005, Parte II – Il Pensiero, pp. 139-155.

e anche i capitoli sull'argomento della *Storia della Scienza*, *vol. 1 La scienza antica*, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, 2000.

1. LA "MATEMATICA PRATICA"

> Il Signore parlò a Mosè nel deserto del Sinai, nella tenda del convegno, il primo del secondo mese, nel secondo anno dalla loro uscita dalla terra d'Egitto, e disse: "Fate il censimento dell'intera comunità dei figli di Israele secondo le loro famiglie, secondo la loro casa paterna, numerando le persone, tutti i maschi, testa per testa. Dai venti anni in su, tutti quelli che in Israele sono abili per l'esercito, tu ed Aronne li censirete per il loro arruolamento".
> *Numeri* (*Arithmòi*) 1, 1-3

La "matematica" di Mesopotamia ed Egitto è in primo luogo un *calcolo utile*, ossia un insieme di tecniche per risolvere problemi che presentano un'utilità pratica eseguendo delle operazioni aritmetiche, le quali permettono di ottenere alcuni numeri sconosciuti a partire da certi dati. La matematica pratica è stata una tradizione culturale che si rivolgeva al particolare, al concreto e all'attività pratica, in contrasto con lo sguardo generale, astratto e teorico che la cultura greca ha portato sui numeri, sulle figure e sui rapporti fra loro.

L'evoluzione organizzativa delle società umane nel mondo antico è stata accompagnata da un'incessante attività di calcolo: conteggi, misurazioni, conti. Per il lavoro come per la guerra, si contavano le persone, i giorni, gli animali, si misuravano (grazie ai vari sistemi di unità di misura) le quantità di grano, di birra, di metallo, le lunghezze e le aree. Attorno all'inizio del II millennio a. C. vi sono in Mesopotamia e in Egitto testimonianze di una ricca tradizione di risoluzione di problemi pratici. I *problemi matematici* delle tavolette d'argilla mesopotamiche e dei papiri egizi presentano dal punto di vista formale una *struttura testuale* del tutto simile a quella dei problemi scolastici della matematica elementare moderna: enunciato (che comprende i dati e il quesito posto); svolgimento, spesso sotto forma di istruzioni allo scriba; e soluzione.

Nel mondo antico, il calcolo – come la scrittura – rappresentò innanzitutto uno strumento tecnico sviluppato nelle società in cui emerse un'autorità e un'organizzazione burocratica e, nel contempo, si sviluppò la divisione del lavoro. Infatti, l'addestramento nella scrittura e il calcolo – utili per i censimenti e le attività amministrative, così come per la costruzione e per organizzare i cantieri e altre attività – era la specializzazione della prima "professione intellettuale" nella storia, quella degli scribi in Mesopotamia ed Egitto.

TECNICA E SCIENZA

tecnica (dal greco *téchne*, che fa riferimento al "saper fare", ossia alla capacità pratica di operare per raggiungere un dato scopo, basata sulla conoscenza ed esperienza del modo in cui è possibile raggiungerlo), insieme di procedure, metodi e oggetti artificiali che sono stati sviluppati dagli esseri umani per condurre molti tipi di attività: dall'agricoltura e l'allevamento, all'edilizia e la gestione del territorio, dalla guerra al commercio e alla produzione artigianale o industriale.

Aristotele distingue *téchne* (le attività produttive di beni durevoli), *praxis* (le attività proprie del cittadino, ossia la politica e la guerra) ed *episteme* (la attività speculativa o contemplativa del filosofo, ossia il sapere disinteressato e non orientato verso scopi pratici)

Le misure e i calcoli eseguiti nei lavori di edilizia e di agrimensura comportano l'uso dei numeri, ma presuppongono anche l'individuazione di alcune figure piane e solide (segmenti, cerchi e circonferenze, triangoli, quadrilateri e poligoni) e delle grandezze relative a tale forme (lunghezza, area e volume), ossia quelle proprietà che sono esprimibili attraverso un numero una volta fissata una unità di misura. Figure e grandezze sono, insieme al numero, idee matematiche di cui vi sono testimonianze storiche fin dal mondo antico nelle attività tecniche. Inoltre, le figure, insieme a idee come quella di proporzione fra segmenti e di simmetria, costituiscono un aspetto centrale dell'elaborazione culturale attorno alla *visualizzazione*, sia riguardo alle forme naturali presenti nel mondo fisico, sia in relazione al lavoro sulla forma nelle arte plastiche e alla progettazione dello spazio nell'architettura.

Vi sono state tradizioni della matematica pratica nel mondo antico e medievale anche in altre aree geografiche (ad esempio, attorno al III secolo a.C. in Cina, nel V secolo d.C. in India). Queste tradizioni pratiche svilupparono algoritmi per eseguire addizioni e moltiplicazioni (diversi a seconda del sistema di numerazione adoperato), procedure di calcolo di aree e perimetri di figure geometriche, metodi per risolvere problemi basati sull'idea di proporzionalità, tavole di quadrati o reciproci dei numeri e una notazione per le frazioni. Esse sono sorte in modo indipendente ma vi sono stati nel corso dei secoli molti influssi reciproci. Vi sono alcuni tratti distintivi che si ritrovano da oriente a occidente e attraverso il tempo nella matematica pratica. Proviamo a elencarli:

– si tratta di un insieme di conoscenze che rientrano nell'ambito della *tecnica* (si veda il glossario), ossia esse sono state sviluppate per coadiuvare gli esseri umani nel lavoro e nelle attività, in particolare per quanto riguarda l'amministrazione, l'attività notarile, l'elaborazione del calendario, i calcoli legati a prescrizioni religiose, l'edilizia, l'agrimensura e il commercio.

– insieme alla scrittura, si tratta di una tecnica intellettuale, in contrasto con le tecniche relative al trattamento dei materiali, all'agricoltura o all'allevamento, con le quali condividono tuttavia l'orientamento utile.

– al pari di altre conoscenze tecniche, nel passato esse sono state tramandate *oralmente* e circoscritte a gruppi limitati di persone (da padre a figlio, da maestro ad apprendista, attraverso i contatti fra artigiani o le carovane dei commercianti).

– quando tali conoscenze sono state scritte, esse si sono presentate essenzialmente come raccolte di istruzioni o ricette (come i manuali tecnici di tutte le arti pratiche), sotto la forma specifica di *collezioni di problemi*, ognuno dei quali riguarda attività come quelle prima elencate e presenta una situazione particolare caratterizzata da dati numerici e geometrici specifici.

– dal punto di vista della struttura testuale, ogni problema presenta un *enunciato* (che comprende i *dati* e il *quesito*), seguito dalla *procedura* per la loro soluzioni, descritta per lo più attraverso una serie di istruzioni, dalla *soluzione* e, alcune volte, di una *verifica* della validità della soluzione.

– le conoscenze riguardano:

  ○ la scrittura dei numeri
  ○ gli algoritmi per eseguire le operazioni aritmetiche (le quattro operazioni e l'estrazione della radice)
  ○ i vari tipi di figure geometriche (il cerchio, i poligoni e alcune figure solide) e la loro misura
  ○ l'idea di proporzionalità

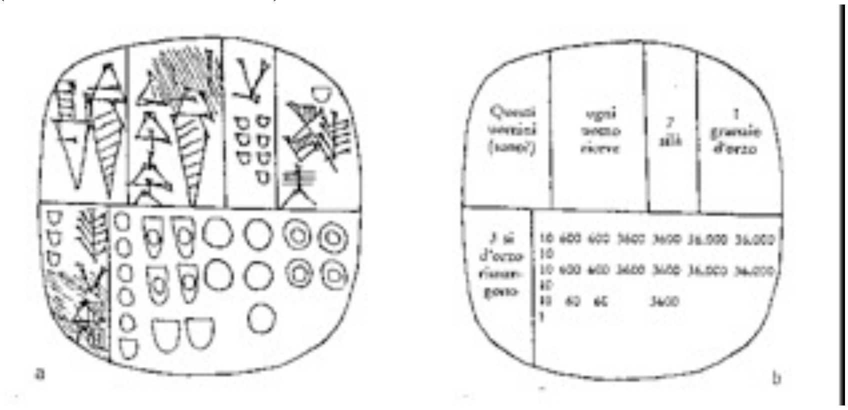
– questa "matematica" è quindi essenzialmente un calcolo utile: ossia si tratta di *applicare le conoscenze prima elencate per risolvere problemi di indole pratica*.

«Raccolte di problemi appartengono alla tradizione matematica di ogni tempo e ogni luogo. I più antichi testi matematici oggi noti, il *Papiro Rhind* e le tavolette babilonesi, hanno questa struttura.

Per molto tempo la forma più consueta di trasmissione della cultura matematica fu proprio quella della collezione di problemi. La trasformazione, avvenuta nella Grecia classica, della matematica da scienza della risoluzione di problemi a scienza della dimostrazione ipotetico-deduttiva, cambiò non solo i contenuti, ma anche la forma dell'esposizione. Tuttavia accanto alla matematica "dotta" continuò ad evolversi una matematica "popolare" o "pratica", la cui principale forma di espressione rimase la raccolta di problemi, spesso raggruppati per similarità di metodi risolutivi»

(Raffaela Franci, "Introduzione" al testo *Problemi per rendere acuta la mente dei giovani* (*Propositiones ad acuendos juvenes,* fine del VIII secolo) di Alcuino di York)

ESEMPIO 1.1 Un problema di suddivisione di un granaio d'orzo fra molti uomini in una tavoletta sumera (risale al 2650 a.C. ca).



Fonte: G. Guitel 1963, "Signification mathématique d'une tablette sumerienne", *Revue d'assyriologie et d'archéologie*, 57: 145-150; traduzione italiane dei testi di Livia Giacardi, "Sistema di numerazione e calcolo algebrico nella terra tra i due fiumi", in *L'alba dei numeri*)

Nella riga superiore si trova l'enunciato (che comprende sia i dati numerici, sia la domanda posta) e nella riga inferiore la soluzione

Dati: *Si ha 1 granaio d'orzo; ogni uomo riceve 7 silà d'orzo.*

Domanda: *Quanti uomini ci sono?*

Soluzione: *Ci sono 164.571 uomini; rimangono 3 silà d'orzo.*

Sono usate due unità di misura di capacità (per l'orzo) sumere, silà e granaio (equivalente a 1.152.000 silà). I due numeri ottenuti (quoziente e resto) sono espressi usando sei segni del sistema sessagesimale di numeri per contare: per le unità, per le decine, per le sessantine, per le decine di sessantine, per le sessantine di sessantine, per le decine di sessantine di sessantine. Il resto è 3. Il quoziente è

$$1 + 5\times 10 + 2\times 60 + 4\times 600 + 5\times 3600 + 4\times 36000$$

che nel sistema di numerazione attuale scrive 164.571.

Interpretazione della soluzione: Si tratta di una divisione con il resto, eseguita forse attraverso una serie di divisioni successive e conversioni fra i sei segni numerici disponibili:

prima divisione $1152000 = 32\times 36000 = (7\times 4 + 4)\times 36000 = 7\times 4\times 36000 + 4\times 36000$

conversione del resto all'ordine di unità successivo

e seconda divisione $4\times 36000 = 40\times 3600 = (7\times 5 + 5)\times 3600 = 7\times 5\times 3600 + 5\times 3600$

conversione del secondo resto

e terza divisione $5\times 3600 = 30\times 600 = (7\times 4 + 2)\times 600 = 7\times 4\times 600 + 2\times 600$

conversione del terzo resto

e quarta divisione $2\times 600 = 20\times 60 = (7\times 2 + 6)\times 60 = 7\times 2\times 60 + 6\times 60$

conversione del quarto resto

e quinta divisione $6\times 60 = 36\times 10 = (7\times 5 + 1)\times 10 = 7\times 5\times 10 + 1\times 10$

sesta divisione $10 = (7\times 1 + 3)$

risultato della divisione $1152000 = 7\times(1 + 5\times 10 + 2\times 60 + 4\times 600 + 5\times 3600 + 4\times 36000) + 3$

ESEMPIO 1. 2 Una tavoletta babilonese dell'antica Susa risalente al 1500 a.C. ca.

Enunciato
1. Un quarto della larghezza aggiungi alla lunghezza: 7 mani
2. 10 è la somma. Quanto la larghezza e la lunghezza?

Tratta da E. M. Bruins, M. Rutten 1961, *Mémoires de la mission archéologique en Iran, tome 34, Textes mathématiques de Suse*, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris; (traduzione italiane dei testi di Livia Giacardi, "Sistema di numerazione e calcolo algebrico nella terra tra i due fiumi", in *L'alba dei numeri*.

ESEMPIO 1. 3 Una tavoletta del periodo seleucide (III secolo a.C.) – *All'inizio fu lo scriba*, pp. 12-13

La matematica pratica in Mesopotamia ed Egitto era del tutto estranea agli aspetti teorici?

All'interno delle antiche tradizioni di matematica pratica sono emersi aspetti che non possono essere ridotti a puro calcolo e pura utilità. In primo luogo, il lavoro con i numeri e le figure ha messo in contatto gli "specialisti" con le proprietà dei numeri naturali e delle frazioni. In secondo luogo, ai numeri sono stati attribuiti significati religiosi e un ruolo nella spiegazione del mistero del mondo, della sua origine e dei suoi fenomeni.

Vediamo attraverso alcuni esempi come si manifestano questi aspetti che esulano dall'utilità pratica nella matematica di Egitto e di Mesopotamia. Poiché è da queste civiltà che è figlia la civiltà greca, questi aspetti ci indicano come le origini della matematica greca si intrecciano con l'antica tradizione della matematica pratica.

La consuetudine di secoli di lavoro con i numeri in Mesopotamia ed Egitto potrebbe aver fatto emergere negli scribi una consapevolezza delle regolarità, delle leggi o proprietà che verificano i numeri naturali. Presentiamo due esempi particolarmente significativi a questo riguardo.

Problemi ricreativi e proprietà generali dei numeri naturali

ESEMPIO 1.4 L'inventario di una proprietà

Nel riquadro "Per una strada che andava a Camogli…" (*All'inizio fu lo scriba*, cap. 2, pp. 26-27) si mette in evidenza che nel problema 79 del papiro Rhind vi è un riferimento implicito a una collezione infinita di numeri

$$7, 7^2, 7^2, 7^2, 7^2, 7^2, \ldots$$

Si tratta di una progressione geometrica di primo termine 7 e differenza 7, ossia, riprendendo le parole di Courant e Robbins "un'intera classe di oggetti aventi qualche proprietà in comune", riguardo alla quale possono essere condotte delle ricerche di indole generale. In questo caso, vi è una formula che ci permette di calcolare la somma di un numero qualsivoglia di termini:

$$S_n = 7 \cdot \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

anzi, in generale, usando il principio di induzione o anche in modo elementare (come si vede nella scuola superiore) si può dimostrare la seguente proprietà:

$$a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + ... + a \cdot r^n = a \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

ESEMPIO 1.5 L'algoritmo di moltiplicazione per duplicazioni successive nei testi egizi

L'addizione e la sottrazione di due numeri, in un sistema di numerazione additivo come quello egizio, si basava sul conteggio dei simboli presenti in entrambi i numeri e alcune trasformazioni (sostituire vari simboli per uno solo, ad esempio dieci tratti verticali con un ansa). Sull'addizione erano basati calcoli più elaborati, quali la procedura che possiamo considerare equivalente alla nostra idea di moltiplicazione basata sulle duplicazioni successive.

Per eseguire ad esempio l'operazione 12×7, lo scriba egizio procedeva così:

1) scriveva due colonne di numeri ottenuti per semplici duplicazioni: la prima di esse iniziando con l; e la seconda iniziando con il secondo fattore della moltiplicazione. Quindi nella prima colonna si leggevano potenze successive di 2:

	1	7
	2	14
\	4	28
\	8	56
	Totale	84

2) sceglieva nella prima colonna i numeri che servivano a riformare il primo fattore (in questo caso 4 e 8 indicandoli con un tratto obliquo)

3) bastava allora eseguire l'addizione dei corrispondenti numeri nella seconda colonna (in questo caso 28 e 56) per ottenere il totale.

In effetti, applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione si ha:

$$12 \times 7 = (4 + 8) \times 7 = 4 \times 7 + 8 \times 7 = 28 + 56 = 84$$

La procedura richiedeva l'abilità, frutto dell'esperienza di lavoro assiduo con i numeri, di scegliere nella prima colonna i numeri necessari a ricostruire il primo fattore della moltiplicazione (in questo caso 12). La domanda che si pone naturalmente è: ma questi numeri si troveranno sempre? La constatazione empirica che, forse con un po' di fatica, alla fine si riesca sempre a trovare una combinazione, e che quindi la ricetta indicata "funzioni sempre", fa emergere la domanda: perché è così?

La spiegazione risiede in una proprietà dei numeri naturali:

ogni numero naturale può essere espresso come somma di potenze di 2, non necessariamente consecutive

Concludiamo ricordando che questa procedura o algoritmo era usata nei calcoli con i numeri romani in Europa prima dell'introduzione del sistema di numerazione decimale posizionale.

Il sapere sui numeri e le concezioni religiose e cosmologiche

I detentori esclusivi delle conoscenze di matematica in Mesopotamia e in Egitto erano gli scribi, i quali avevano un ruolo, un'autorità e un prestigio sociale che derivano da una concezione teocratica, secondo la quale il senso della vita dell'uomo è il lavoro per conto della divinità e il potere del re è derivato direttamente dagli dei (si veda lettura 1). Così, in Egitto, la scrittura, la magia e il calcolo (ossia le specialità dello scriba) erano un dono del dio Osiride (colui che aveva insegnato agli Egizi tutte le conoscenze della loro civiltà) insieme al dio Toth, protettore degli scribi.

Ma è soprattutto nelle origini dell'astronomia babilonese che le tecniche di calcolo numerico – che hanno un valore "pratico" legato alla divinazione – si collegano strettamente con la visione cosmologica dell'ordine del mondo come frutto delle decisioni delle divinità (si veda *All'inizio fu lo scriba*, cap. 1, pp. 14-16).

ESEMPIO 1.6 I due sistemi di misura degli angoli e del tempo in uso attualmente sono un'eredità del sistema di notazione numerico erudito adoperato dagli scribi babilonesi a partire dal XIX secolo a. C. circa.

Ecco un testo mesopotamico dove il dio Marduk, che occupava il ruolo supremo nel pantheon babilonese, "scrive" un numero adoperando questo sistema di rappresentazione scritta:

"Dopo avere iscritto sulla tavoletta dei Destini il numero di settanta anni per l'oblio di Babilonia, il dio Marduk ebbe pietà e tornò sulla sua decisione. Invertì l'ordine delle cifre e decise così che questa città sarebbe stata recuperata dopo undici anni"

(Dalla *Pietra nera* di Asarhadon, re degli Assiri, 680-669 a.C.; Asarhadon ricostruì la città di Babilonia undici anni dopo la sua distruzione da parte del padre Senaquerib, avvenuta nel 689 a.C.)

ESEMPIO 1.7 La divinazione babilonese, la raccolta di presagi celesti *Enuma Anu Enlil* e le origini dell'astronomia antica

"[i dei sono] coloro che valutano la legge del paese, determinano i destini, tracciano i disegni cosmici, assegnano le sorti del cielo e della terra [e sono invocati perché] è nelle vostre mani decidere i destini e tracciare i disegni cosmici; voi determinate le sorti della vita, ne tracciate il disegno e regolate le decisioni"

(Dal poema epico della creazione *Enuma elis* (Quando in alto), racconto dell'ascesa del dio Marduk al ruolo supremo nel pantheon babilonese)

2. ALLE ORIGINI DELLA RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA: I SISTEMI DI NUMERAZIONE

I *conteggi* di oggetti e di quantità e le *registrazioni scritte* dei risultati di tali conteggi costituiscono la prima manifestazione storica del concetto di numero. Nelle testimonianze scritte di tutte le civiltà antiche si ritrovano parole per contare (i *numerali*) e una piccola collezione di segni grafici che rendono possibile registrare le quantità (i simboli numerici), organizzati seguendo diversi sistemi di numerazione.

Nei reperti più antichi, le tavolette di argilla ritrovate nella città di Uruk, in Mesopotamia, risalenti alla fine del IV millennio a. C., le quantità registrate riguardano questioni amministrative e tecniche (tasse, pagamenti, magazzini, edilizia); i segni utilizzati cambiano a seconda di ciò che si conta. In Cina, i primi segni numerici si ritrovano in iscrizioni su ossa di animali o gusci di tartaruga risalenti alla seconda metà del II millennio a.C. riguardanti la divinazione (ad esempio, sul risultato della caccia). In India, i reperti più antichi che contengono cifre sono gli editti emessi dall'imperatore Ashoka (III secolo a.C.) in sanscrito incisi su rocce o colonne in scrittura alfabetica. In America centrale, in una stele situata nel sito archeologico di Pestac si trova la più antica testimonianza (risalente all'anno 665 d. C.) del sistema di numerazione posizionale in base 20 usato dai maya per contare i giorni del calendario.

La notazione simbolica di quantità è una parte delle convenzioni di ogni sistema di scrittura; anzi, secondo alcune ipotesi, la registrazione numerica potrebbe essere stata all'origine dell'invenzione stessa della scrittura nel IV millennio a. C. nel Vicino Oriente antico.

È importante distinguere il *numero* (concetto astratto) dal *simbolo* usato per scriverlo, simbolo che è una convenzione. Ad esempio, i simboli

10 X ⋂

rappresentano graficamente lo stesso numero rispettivamente nel sistema di numerazione di origine indoarabica, nel sistema di numerazione romano e nel sistema di numerazione antico egizio, così come i *numerali* «due», «two», «dos» indicano lo stesso numero in tre lingue moderne diverse.

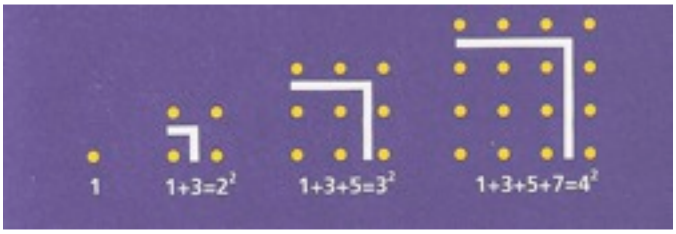
Allo stesso modo, anche i due simboli

$$\frac{1}{2} \quad 0{,}5$$

sono due notazioni che designano uno stesso numero (non più un numero naturale). Si tratta di due notazioni moderne, che usano le cifre indoarabiche e in più la linea di frazione e la virgola. La notazione decimale dei numeri non interi è diventata di uso comune soltanto nell'Europa moderna, soprattutto dal XVII secolo (il punto, usato ancora oggi nei paesi anglosassoni, fu introdotto da Giovanni Antonio Magini nel 1592; la virgola, nel 1608, dall'olandese Willebrod Snellius). Essa ha contribuito a far pensare le quantità non intere, ossia quelle che non possiamo esprimere con i numeri naturali, come veri e propri numeri, poiché con questa notazione i numeri naturali sono particolari numeri decimali che non hanno cifre significative dopo la virgola.

La notazione *letterale* del algebra, ossia l'uso delle lettere per rappresentare i numeri, rende più evidente la differenza fra il concetto astratto di numero e la sua rappresentazione.

Per non confondere il concetto astratto di numero con la sua rappresentazione scritta si possono usare dei modelli concreti (materiali o virtuali). Ad esempio, Richard Courant e Herbert Robbins, nel classico *Che cos'è la matematica*, presentano un modello che pensa i numeri con palline poste in scatole rettangolari, che possono essere anche realizzate materialmente. Anche i pitagorici usavano dei modelli geometrici, poiché rappresentavano i numeri come aggregati di punti, e anzi la loro disamina dei naturali includeva lo studio di disposizioni geometriche particolari, i cosiddetti *numeri figurati*, quali i *numeri triangolari* 1, 3, 6, 10,… i *numeri quadrati*, 1, 4, 9, 16,… (si veda la figura), i *numeri pentagonali* e così via.



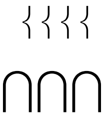
Nella Cina antica, indipendentemente dalla scrittura dei numeri, per eseguire gli algoritmi si usava una procedura basata su una rappresentazione dei numeri grazie a bastoncini (*suan*) disposti su una superficie di calcolo seguendo una regola posizionale decimale.

La ricerca moderna sull'insegnamento della matematica ha anche introdotto dei modelli concreti dei numeri. Il maestro belga Emile-Georges Cuisenaire (1891-1976) introdusse nella sua scuola della cittadina di Thuin i regoli colorati (presentati nel suo lavoro del 1952 *I numeri in colore*) oggi diffusi in tutto il mondo. La ricercatrice belga Fréderique Papy, studiosa dell'insegnamento elementare della matematica, suggerì una rappresentazione dei numeri naturali con pedine disposte su una tavola di calcolo. La stessa funzione hanno i blocchi multibase dello studioso di origine ungherese Zoltan Dienes.

Rappresentazione simbolica dei numeri, decomposizione aritmetica e teorema di rappresentazione

Un sistema di numerazione è un insieme di segni grafici e una procedura di notazione per rappresentare simbolicamente i numeri. Vi sono stati storicamente due tipi fondamentali di procedure, basati rispettivamente sul principio additivo e su quello di posizione.

In un sistema di numerazione *additivo*, si scrivono una serie di segni numerici, se necessario ripetendoli, uno accanto all'altro, e il numero rappresentato è la somma totale dei valori dei segni. Ovviamente è possibile rappresentare qualsiasi numero in tal modo (e basta avere un simbolo per l'unità), anche se può essere molto farraginoso. Il sistema di numerazione egizio nella scrittura geroglifica, ad esempio, usava sei diversi simboli: la tacca per l'unità e l'ansa, la corda a spirale, il fiore di loto, il dito alzato, il girino e il dio che indicavano le prime sei potenze di dieci. Così,



stava ad indicare 34 (quattro tacche e tre anse). Anche il sistema dei numeri romani era essenzialmente additivo.

Ogni sistema di rappresentazione simbolica dei numeri naturali – come ogni sistema di parole-numero (i numerali) – presuppone la consapevolezza di alcune proprietà o regolarità dei numeri naturali. Tali sistemi si basano su una decomposizione del numero usando alcuni numeri privilegiati (ad esempio l'unità, dieci, sessanta, le potenze di dieci) e l'addizione oppure l'addizione e la moltiplicazione.

Per rappresentare i numeri attraverso simboli, bisogna prima chiedersi quale è il simbolo che rappresenta il numero maggiore che possiamo adoperare, e poi "raggruppare". Ad esempio, per rappresentare il numero centoquarantacinque nella numerazione dei Sumeri iniziamo da raggruppare per sessanta, poi per dieci, poi per uno (non possiamo raggruppare per seicento).

I sistemi di numerazione basata sul principio posizionale adoperano una decomposizione del numero che usa l'addizione, la moltiplicazione, e le potenze della base. Iniziamo a raggruppare per la potenza maggiore possibile della base, e poi raggruppiamo per le potenze successive. Lo sfruttamento sistematico di tale decomposizione rende evidente la consapevolezza raggiunta delle proprietà dei numeri naturali. Infatti, fissata una base, il teorema di rappresentazione dei numeri interi afferma che *ogni* numero naturale (ossia gli interi positivi) può essere rappresentato o decomposto in questo modo e che tale rappresentazione è *unica* (non è possibile rappresentare lo stesso numero accostando un diverso gruppo di cifre). Quindi, la rappresentazione posizionale dei numeri non è ambigua, a differenza di ciò che succede con la rappresentazione con parole o con la scrittura alfabetica di altri concetti astratti). Questo teorema è strettamente legato alla nostra intima consapevolezza delle regolarità dei numeri naturali.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI INTERI Sia b un numero naturale maggiore di 1. Ogni numero naturale n può essere rappresentato in modo unico nella forma

$$n = a_k \times b^k + a_{k-1} \times b^{k-1} + ... + a_3 \times b^3 + a_2 \times b^2 + a_1 \times b^1 + a_o$$

con k un numero naturale, $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ numeri naturali minori di b e $a_k \neq 0$

Il teorema di rappresentazione si dimostra usando il principio di induzione e il teorema di esistenza e unicità di quoziente e resto nella divisione con resto.
Si osservi che k è il numero delle cifre che permettono di scrivere il numero; ognuna delle cifre usate, indicate con a_i, rappresenta un numero minore della base scelta.

Esempio 1.9 Ecco quanto scriveva Laplace sul pensiero di Leibniz in relazione alla scrittura posizionale binaria dei numeri:

> «Leibniz vide in questa aritmetica binaria l'immagine della creazione. Egli immaginò che l'Unità rappresentasse Dio e lo zero il vuoto, e che l'Ente supremo avesse tratto tutti gli esseri dal vuoto, precisamente come l'unità e lo zero esprimono tutti i numeri in questo sistema di numerazione»

Esempio 1.11 Nell'astronomia babilonese antica veniva adoperato un sistema di numerazione che adoperava due soli segni per scrivere i numeri fino a sessanta usando il principio additivo; oltre il numero sessanta veniva applicato il principio posizionale in base 60. Traccia di questo sistema posizionale sessagesimale si ritrova modernamente nelle unità di misura del tempo e delle ampiezze angolari (si veda *All'inizio fu lo scriba*, cap. 1, pp. 10-11).

Sistemi di numerazione e rappresentazione simbolica

Fin dalle origini preistoriche è presente nella cultura umana la rappresentazione della realtà come raffigurazione o riproduzione di un aspetto della realtà, mediante figure o segni sensibili (nelle arti figurative) o mediante l'interpretazione (ad esempio nel teatro). Ma l'essere umano raffigura la realtà anche attraverso dei simboli, ossia attraverso dei gesti, segni o figure che non riproducono la realtà ma suscitano invece nella mente un'idea diversa da quella offerta dal loro immediato aspetto sensibile. I simboli possono servire a rappresentare oggetti visibili, ma ancor di più oggetti o idee astratte. La scrittura e la notazione della matematica sono un aspetto basilare della rappresentazione simbolica.

I sistemi di numerazione costituiscono l'esempio più antico di rappresentazione simbolica in matematica, forse derivato nel Vicino Oriente antico dal sistema di rappresentazione di prodotti e di quantità attraverso contrassegni. Nel corso della storia la collezione dei simboli usati dalla matematica per rappresentare idee (l'uguaglianza fra oggetti, il raccogliere oggetti) e enti astratti (un punto, un numero, una coppia di numeri, una variabile) si è arricchita sempre di più: ogni definizione in matematica è accompagnata da istruzioni riguardanti la notazione simbolica.

Più in generale: la matematica si occupa e lavora sulla rappresentazione. Pensiamo ad esempio ad alcuni casi elementari quali la rappresentazione dei punti mediante le coordinate una volta fissato un sistema di riferimento; oppure alla scelta della frazione ridotta ai minimi termini come rappresentante della collezione di tutte le frazioni equivalenti; alle decomposizioni dell'aritmetica (scomposizione in fattori primi, divisione con resto); alle identità algebriche; oppure alla rappresentazione di una procedura di calcolo mediante un diagramma di flusso; o ancora alla rappresentazione di un certo numero in base due nel calcolare elettronico. In matematica, rappresentare significa sostituire a un ente un altro ente che, sotto certi aspetti e mediante opportune convenzioni, sia ad esso equivalente.

La notazione posizionale dei numeri frazionari

Ricordiamo che i sistemi di numerazione posizionali permettono di scrivere, oltre ai numeri interi, anche numeri frazionari. Per esempio, nel sistema di numerazione posizionale decimali oggi usuale si impiegano le posizioni a destra delle unità, separandole con una virgola:

$$\frac{9}{4} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} \longrightarrow 2{,}25$$
$$\frac{63}{500} = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 6 \cdot \frac{1}{1000} \longrightarrow 0{,}126$$

In generale, la regola di rappresentazione è la seguente: se un numero v si può decomporre nel modo seguente, usando le potenze della base, le frazioni unitarie di potenze della base, l'addizione e la moltiplicazione

$$v = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0 + c_1 \cdot \frac{1}{10} + c_2 \cdot \frac{1}{b^2} + ... + c_m \cdot \frac{1}{b^m}$$

allora il numero si rappresenta, con l'ausilio di una virgola, accostando le cifre $a_n,...,a_3,a_2,a_1,a_0,b_1,b_2,...,b_m$ nel modo seguente

$$a_n..a_3a_2a_1a_0,c_1c_2..c_m$$

Lettura

Sapere pratico-operativo, sapienza religiosa e scienza nelle prime civiltà

Nelle prime civiltà il sapere tecnico si allarga e si diversifica (agricoltura, allevamento, tessitura, ceramica, metalli, amministrazione) e inizia a interagire con il sapere erudito, il quale inizia a costruirsi in forme ancora lontane dalla nostra idea di "scienza". La figura centrale di questi sviluppi è lo scriba, colui che conosce la scrittura e il calcolo (rappresentazione dei numeri, operazioni aritmetiche, risoluzione di problemi), grazie a un impegnativo addestramento in apposite scuole; egli è ragioniere e amministratore, geometra e architetto, ma anche indovino e mago. Non vi sono chiare delimitazioni fra il sapere pratico-operativo, la sapienza religiosa e la scienza (astronomia, medicina). Ecco come lo storico del Vicino Oriente antico Mario Liverani ci descrive una società e una cultura lontane, ma dove vediamo emergere prime forme di organizzazione e di confronto con l'informazione quantitativa (quantità e misure).

La specializzazione delle competenze, che senza dubbio costituisce un fattore positivo (se non indispensabile) per il progresso dei procedimenti tecnico-operativi e per la riflessione sul loro contesto logico-teorico, è molto avanzata nel Vicino Oriente antico. Sin dalle prime attestazioni scritte (fine del IV millennio) è documentata un'ampia gamma di operatori specializzati. Essi lavorano in parte in proprio, in ambito familiare, e in parte per conto del tempio o del palazzo, che è al tempo stesso datore di lavoro, committente, fornitore delle materie prime. Esistono anche forme miste, con operatori che svolgono parte del loro lavoro in proprio e parte per conto del tempio o del palazzo, oppure settori che comportano sia operatori privati sia operatori inquadrati nei ranghi delle grandi organizzazioni.

Esiste però una specializzazione particolare, quella dello scriba, che è l'unica specializzazione "intellettuale" prevista. Il lavoro dello scriba è il più impegnativo, nel senso che l'addestramento richiede lunghi anni di dura applicazione a causa dei complessi sistemi logosillabilici in uso, ed è anche quello maggiormente valutato dal punto di vista della retribuzione e del rango sociale. In un qualunque campo di competenza tecnico-scientifica, dunque, si assiste a una sorta di divaricazione tra sapere tecnico e sapere teorico, che non ha giovato al sorgere di una speculazione propriamente scientifica.

Si consideri, per esempio, il caso della chimica: procedimenti che comportano la conoscenza delle trasformazioni subite da una sostanza quando è fortemente riscaldata o quando è a contatto con altre sostanze sono applicati nella produzione della ceramica e poi del vetro, nella metallurgia, nella preparazione dei profumi e delle droghe, ecc. Per ciascuna di queste applicazioni esistono i tecnici specializzati, che trasmettono all'interno del loro gruppo, di generazione in generazione (di norma di padre in figlio), nozioni ed esperienze; un'esposizione teorica dei principi potrebbe però avvenire soltanto da parte degli scribi, che monopolizzano l'uso della scrittura e che sono potenzialmente interessati a una concettualizzazione non strettamente legata all'attività produttiva e quotidiana.

Questa trasmissione del sapere tecnico all'ambito degli scribi si palesa solo raramente, e piuttosto per tecnologie nuove che non per quelle tradizionali. Per esempio, sempre nel campo della chimica, questa trasmissione si verifica per la produzione del vetro verso la metà del II millennio, con la compilazione di istruzioni scritte; oppure, nel campo della zootecnia, si verifica per l'allevamento del cavallo, nuova tecnica introdotta anch'essa verso la metà del II millennio, mentre non avviene per l'allevamento di altri animali che faceva tempo da tempo ormai remoto delle comuni pratiche e conoscenze. In linea generale, la struttura socio-culturale dell'epoca respinge le competenze tecnico-scientifiche verso un ambito di lavoro manuale, non particolarmente apprezzato, mentre riserva agli scribi una competenza generale ma astratta, di gestione e controllo del lavoro altrui.

Allo scriba sono peraltro riservate alcune competenze specialistiche; non a caso, si tratta proprio di quei settori che assumono una configurazione più vicina a quella di "scienza". Innanzitutto gli scribi, in quanto amministratori, sono gli specialisti del calcolo matematico; in effetti, tutto il settore matematico è fra i più sviluppati e fra i più fertili in sperimentazioni e in esemplificazioni astratte (sotto forme di "problemi"), svincolate dal caso concreto. Inoltre, certi categorie di scribi si specializzano nell'astronomia, altro settore vistosamente avviato verso uno statuto scientifico; sono gli scribi a eseguire le osservazioni celesti, a registrarle per iscritto, a consultare le serie "canoniche" per la decodifica dei fenomeni. Altre categorie, anch'esse rientranti nel sapere scribale, sono specializzate nella consultazione delle serie mantiche, mediche, magiche, e conferiscono a queste tecniche – che per noi sarebbero assai poco scientifiche – uno statuto scientifico secondo i canoni dell'epoca.

Il rapporto tra sapere pratico e riflessione teorica è dunque strettamente collegato al rapporto tra specialisti e scribi, nonché alla posizione sociale e alla funzione di questi ultimi. Il risultato è che certi settori considerati meno prestigiosi sono rimasti tagliati fuori dalla riflessione teorica, mentre questa si è accentrata su settori che proprio per la loro centralità nella "mappa mentale" del sapere cosmologico mesopotamico erano maggiormente esposti al condizionamento da parte di punto di vista teologici, cosmologici e magici.

[…] Alla metà del VIII secolo, sotto il re babilonese Nabu-nasir (il Nabonassar di Beroso) inizia a quanto pare la redazione sia delle *Cronache babilonesi* sia dei *Diari* *astronomici* che del resto ne costituiscono la base documentaria. La redazione dei *Diari astronomici*, ossia la consapevole operazione di registrare notte dopo notte la posizione delle stelle e il verificarsi di congiunzioni ed eclissi, e di registrare in parallelo prezzi, livello del fiume, eventi storici e vari, va avanzando per secoli e secoli, in una serie di tavolette, l'una aggiungentesi all'altra, che è ancora attivamente aggiornata nel I secolo a.C. Di questa serie restano parti sostanziose, relative soprattutto ai secoli IV-II, che fanno immaginare facilmente come l'opera completa dovesse essere e apparire un impressionante lavoro collettivo di generazioni e generazioni di scribi e di astronomi quotidianamente impegnati nell'accumulare dati, imperturbabili agli eventi del mondo circostante, al fine di dotare di una base documentaria ampia e certa la teoria delle interconnessioni tra segni astrali ed eventi terreni».

[Tratto dall'introduzione di Mario Liverani alla sezione "La scienza nel Vicino Oriente Antico" del volume citato in bibliografia Storia della Scienza, 2000, pp. 203-204 e 210]

Esercizi

1) Costruisca un asse cronologico iniziando dal periodo dalla nascita della scrittura in Mesopotamia fino alla fine del mondo antico nel V secolo. Segni le date menzionate a lezione, e consulti nel suo manuale scolastico altre date utili per collocarsi storicamente. Indichi il periodo paleobabilonese nel quale si collocano le più grandi raccolte di problemi (lingua accadica) e il Medio Regno egizio al quale risalgono i principali papiri di contenuto matematico che ci sono pervenuti.

2) In che senso la nascita della matematica è legata alla nascita della scrittura?

3) Elenchi le caratteristiche del sapere matematico all'alba della civiltà: contenuti, metodi, fini e modi di trasmissione del sapere.

4) Possiamo considerare che il sapere matematico in Egitto e nel Vicino Oriente antico come un sapere tecnico volto alle attività pratiche?

5) «I linguaggi primitivi danno al numero un senso concreto» scrivono Richard Courant e Herbert Robbins all'inizio del loro libro *Che cos'è la matematica*. Illustrare quest'affermazione in riferimento al caso della civiltà sumera in Mesopotamia.

6) I sistemi di numerazione protocuneiformi in Mesopotamia: numero astratto, numero concreto

7) Quali sono le applicazioni principali delle conoscenze aritmetiche e geometriche in Mesopotamia e in Egitto?

8) Descriva la figura dello scriba nel contesto culturale e sociale del Vicino Oriente antico.

9) Il sistema di numerazione sessagesimale posizionale erudito babilonese

10) I sistemi di numerazione e la rappresentazione in matematica (Consulti il significato di "rappresentare" e di "simbolo" sul vocabolario, ad esempio il Vocabolario "Treccani")

11) Spieghi in che senso la tradizione di divinazione emersa nel periodo paleobabilonese presenta alcuni tratti del concetto di *scienza*.

12) Nella testa della mazza del re Narmer (3050 a.C. ca.) è rappresentato un bottino ricavato dal sovrano: 400.000 bovini, 1422.000 ovini e 120.000 prigionieri. Rappresenti queste quantità usando il sistema di numerazione geroglifico degli Egizi e indichi attraverso un'espressione aritmetica la decomposizione usata per rappresentare ognuno di questi numeri.

13) Sul monumento alla vittoria del re Khasekhemi (2750 a.C. ca.) il numero dei ribelli del Basso Egitto che sono "sotto la pianta del re" è 47.208. Rappresentare tale numero usando il sistema di numerazione geroglifico degli Egizi e indichi attraverso un'espressione aritmetica la decomposizione usata per rappresentarlo.

14) In una tavoletta sumerica risalente al 2850 a.C. ca. sono indicati le seguenti quantità (con in calce, forse, una firma): quindici sacchi d'orzo, trenta sacchi di grano, sessanta sacchi di ?, quaranta sacchi di ?, quindici volatili, centoquarantacinque sacchi vari, quindici volatili (L'alba dei numeri, p.). Rappresentare le quantità usando il sistema di numerazione dei sumeri e indicare attraverso un'espressione aritmetica la decomposizione usata per rappresentare ognuno di questi numeri.

15) Rappresentare il numero 2360 usando il sistema di numerazione sumerico e indicare attraverso un'espressione aritmetica la decomposizione usata. In una tavoletta sumerica risalente al 2650 a.C. si trova registrata il numero 2360 usando una decomposizione basata anche sulla sottrazione 2400 – 40. Rappresentare in questo modo il numero, usando sempre i simboli numerici dei sumeri e scrivere l'espressione aritmetica della decomposizione usata. Confronti il numero di simboli utilizzati nelle due rappresentazioni dello stesso numero. (L'alba dei numeri, p.)

16) In una tavoletta sumerica risalente al 2650 a.C. e relativa a una ripartizione di orzo è indicato il numero 164.571 di uomini. Rappresenti questa quantità usando il sistema di numerazione dei sumeri e indichi attraverso un'espressione aritmetica la decomposizione usata. Questa tavoletta è riprodotta in una delle lezioni del materiale didattico, dove può verificare la rappresentazione trovata. (L'alba dei numeri, p.)

17) Rappresenti centosessantatre, duecentosettantacinque, duemiladue usando il sistema di numerazione geroglifico degli Egizi e indichi attraverso un'espressione aritmetica la decomposizione usata per rappresentare ognuno di questi numeri. Quanti simboli ha utilizzato per ognuno di questi numeri.

18) Rappresentare il seguente numero naturale usando i sistemi di numerazione sotto indicati:
$3 \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 5 \times 6 + 3$
i) il sistema di numerazione posizionale in base sei usando le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

ii) il sistema di numerazione di uso corrente
iii) il sistema di numerazione nella scrittura geroglifico dell'Egitto antico
iv) il sistema di numerazione dei Romani
v) il sistema di numerazione erudito dei Babilonesi. Quali altri numeri (interi o frazionari) potrebbe rappresentare il simbolo ottenuto? Fare tre esempi.

19) La civiltà Maya, che fiorì in America centrale nei secoli 300 a.C.-900, faceva uso di una scrittura geroglifica e di un sistema di numerazione in base 20 che adoperava i due simboli — (cinque unità) e • (l'unità). Scrivere i numeri: 11, 13, 12, 9, 8 e 7. Nei testi riguardanti la cronologia maya, è usata anche una notazione posizionale in disposizione verticale, con le unità nella posizione più in basso. Scriva seguendo questo principio 43 giorni, 310 giorni.
Scriva un'espressione aritmetica che indichi la decomposizione usata per rappresentare con i simboli maya questo numero di giorni.

20) Scrivere una tabella con le rappresentazioni posizionali decimale (moderna) e sessagesimale (babilonese) degli inversi dei numeri naturali.